Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Grifone
Isenmann-P (dev1)
Perrin (dev 2)

On considère $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Généralités

1. Formes bilinéaire symétriques, formes quadratiques

Définition 1.1 On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire en les deux arguments.

Définition - Proposition 1.2 Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice $\begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$. On a alors pour tous $x, y \in E$ de matrices de coordonnées X, Y : $\varphi(x,y) = {}^tX \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) Y$.

Proposition 1.3 Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E, $P := P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPMP$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Définition 1.4 Une forme bilinéaire φ est dite symétrique si pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. Cela équivaut au fait que dans toute base de E la matrice de φ est symétrique.

Définition 1.5 On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe φ bilinéaire symétrique vérifiant pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$.

Une telle forme bilinéaire symétrique est unique et est appelée forme polaire associée à q.

Remarque 1.6 Une forme quadratique sur E est, étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i de x dans la base $\mathcal{B}$.

2. Rang et noyau d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Définition 1.7 On appelle rang de q, le rang de φ i.e. le rang de la matrice de φ dans n'importe quelle base de E.

On dit que φ / q est non dégénérée si elle est de rang maximal i.e. n.

Exemple 1.8

Soit $\varphi : (x,y) \longmapsto x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_3$

Alors $\mathrm{Mat}_{(e_i)} \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. On a : φ dégénérée car de rang 2.

Définition 1.9 On appelle noyau de φ / q, $N(q) = N(\varphi) := \{ y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0 \}$.

Proposition 1.10 La forme q / φ est non dégénérée si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 1.11 La forme q est dite définie si : $\forall x \in E, (q(x) = 0 \iff x = 0)$.

Proposition 1.12 On a $\dim E = n = \dim N(q) + \mathrm{Rg}\, q$.

Application Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on considère q_S la forme quadratique associée et E_S l'ellipsoïde $E_S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q_S(x) \leqslant 1 \}$.

Lemme 1.13 En notant B la boule unité et $\mu : M \longmapsto (\det M)^{-1/2}$, on a : $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\, \mathrm{Vol}(B)$.

Proposition 1.14 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.15 (John-Loewner) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K et de volume minimal.

développement 1

II. Orthogonalité et isotropie

1. Orthogonalité

Définition 2.1 On dit que x, y sont orthogonaux pour φ si $\varphi(x,y) = 0$. On note $x \perp y$.

Définition 2.2 Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A, \varphi(x,a) = 0\}$.

Proposition 2.3 Soit A une partie de E. Alors :

- $A^\perp$ est un s.e.v de E
- $\{0\}^\perp = E$
- $E^\perp = N(q)$
- $N(q) \subset A^\perp$

Proposition 2.4 Soit F un s.e.v. de E. Alors : $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q))$ et $F^{\perp\perp} = F + N(q)$.

En particulier, si q est non dégénérée, $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Définition 2.5 Un s.e.v. F de E est dit régulier si $N(q|_F) = \{0\}$.

Définition 2.6 Une base $\mathcal{B} = (e_i)_i$ de E est dite orthogonale pour φ si pour $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème 2.7 Toute forme quadratique admet une base orthogonale.
(méthode de Gauss)

Proposition 2.8 Toute forme quadratique s'écrit comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes sur E.

Exemple 2.9

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5x_1x_2 + 6x_2x_3 + 3x_2x_3$

Alors : $q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$

2. Isotropie

Définition 2.10 Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$.

Remarque 2.11 La forme quadratique est définie si 0 est son seul vecteur isotrope.

Définition 2.12 On appelle cône isotrope de q, noté $I(q)$, l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

Remarque 2.13 Le cône isotrope n'est pas un s.e.v. Toutefois, ce qu'il vérifie c'est que pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in I(q)$, on a $\lambda x \in I(q)$.

Exemples 2.14

- $E = \mathbb{R}^2$, $q : x \longmapsto x_1^2 - x_2^2$ alors $I(q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$
- $E = \mathbb{R}^3$, $q : x \longmapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ alors $I(q) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$

Proposition 2.15 On a : $N(q) \subset I(q)$.

III - Classification des formes quadratiques

Définition 3.1 Deux formes quadratiques q, q' sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ vérifiant $q = q' \circ u$.

Remarque 3.2 Cela signifie qu'elles sont représentées par la même matrice dans des bases différentes.

1. Sur un corps algébriquement clos

Théorème 3.3 Soit q une forme quadratique de rang r, et supposons $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

Corollaire 3.4 Il existe une base orthonormée pour q si et seulement si q est non dégénérée.

Corollaire 3.5 Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

2. Sur le corps des réels

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème 3.6 (Sylvester) Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_{r-p} & \\ (0) & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}\, q$ et p est un entier qui ne dépend que de q (et non de la base).

Définition 3.7 Sous les hypothèses précédentes, le couple $(p, r-p)$, noté $\mathrm{sign}(q)$, est dit signature de q.

Corollaire 3.8 Soit q une forme quadratique sur E. Alors :

- q est définie positive $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(q) = (n, 0)$
- q est définie négative $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(q) = (0, n)$
- q non dégénérée $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(q) = (p, n-p)$

Remarque 3.9 En appliquant la méthode de Gauss, on trouve $\mathrm{sign}(q)$.

3. Sur les corps finis

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$.

Théorème 3.10 Soit q une forme quadratique sur E non dégénérée et soit $\alpha \in \mathbb{F}_q$ qui ne soit pas un carré. Alors il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi = I_n$ ou (exclusif) il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$.

Lemme 3.11 L'équation $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ admet des solutions sur $\mathbb{F}_q$.

développement 2